解析学概論　解答例

2012.06.10

■　各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$\Psi_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ を帰納的に

$$\text{(i) } \Psi_n(0) = 0, \qquad \text{(ii) } \Psi_n(S(m)) = \Psi_n(m) + n \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

により定義する．このとき，すべての n，m，$k \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\Psi_{\Psi_n(m)}(k) = \Psi_n(\Psi_m(k)) \tag{E}$$

が成り立つことを示せ．ここで，分配法則，つまり，すべての n，m，$k \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Phi_n(m) + \Psi_n(k) = \Psi_n(m+k)$ が成り立つことを用いてもよい．

(解)　n，$m \in \mathbb{N}_0$ を任意にとり固定し，k に関する数学的帰納法で証明する．(1) $k = 0$ のとき，

$$(\text{左辺}) = \Psi_{\Psi_n(m)}(0) \overset{\text{(i)}}{=} 0, \qquad (\text{右辺}) = \Psi_n(\Psi_m(0)) \overset{\text{(i)}}{=} \Psi_n(0) \overset{\text{(i)}}{=} 0$$

より (E) が成り立つ．(2) $k = \ell$ のとき (E) が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned}\Psi_{\Psi_n(m)}(S(\ell)) &\overset{\text{(ii)}}{=} \Psi_{\Psi_n(m)}(\ell) + \Psi_n(m) \overset{\text{仮定}}{=} \Psi_n(\Psi_m(\ell)) + \Psi_n(m) \\ &\overset{\text{分配}}{=} \Psi_n(\Psi_m(\ell) + m) \overset{\text{(ii)}}{=} \Psi_n(\Psi_m(S(\ell)))\end{aligned}$$

より，$k = S(\ell)$ のときも (E) が成り立つ．数学的帰納法より，すべての n，m，$k \in \mathbb{N}_0$ に対して (E) が成り立つ．■