# 解析学概論　解答例

2012.06.17

■ $n$，$m \in \mathbb{N}_0$ に対して，二項関係 $\leq$ および $<$ を

$$\begin{aligned} n \leq m \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}_0 \ (\Phi_k(n) = m) \\ n < m \quad &\Longleftrightarrow \quad n \leq m \ \wedge \ n \neq m \end{aligned}$$

により定義する．このとき，すべての $n$，$m \in \mathbb{N}_0$ に対して，$n < S(m)$ ならば $n \leq m$ が成り立つことを示せ．

**（解）** 定義より，$n \leq S(m)$ かつ $n \neq S(m)$ が成り立つ．$n \leq S(m)$ より，ある $k \in \mathbb{N}_0$ が取れて，$\Phi_k(n) = S(m)$ となる．$k = 0$ なら $S(m) = \Phi_0(n) = n$ となり，$S(m) \neq n$ に反するので，$k \neq 0$ でなければならない．$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup S(\mathbb{N}_0)$ より，$k \in S(\mathbb{N}_0)$ となり，ある $\ell \in \mathbb{N}_0$ が取れて，$S(\ell) = k$ が成り立つ．$S$ が単射であることと

$$S(m) = \Phi_{S(\ell)}(n) \overset{\text{交換}}{=} \Phi_n(S(\ell)) \overset{\text{加法の定義}}{=} S(\Phi_n(\ell)) \overset{\text{交換}}{=} S(\Phi_\ell(n))$$

より，$m = \Phi_\ell(n)$ が得られる．したがって，$n \leq m$ である．■