# 解析学概論　解答例

2012.06.24

■　整数 $[(a,b)]$，$[(c,d)]$ に対して，演算 $\#$ を

$$[(a,b)]\,\#\,[(c,d)] = [(a+c, b+d)]$$

により定義するとき，演算 $\#$ は代表元の取り方に依存せずにうまく定義できていることを示せ．ここで，演算 $+$ は自然数の集合における加法である．

**（解）** $[(a_1,b_1)] = [(a_2,b_2)]$，$[(c_1,d_1)] = [(c_2,d_2)]$ とすると，同値類の性質より $(a_1,b_1) \sim (a_2,b_2)$，$(c_1,d_1) \sim (c_2,d_2)$ であり，さらに同値関係 $\sim$ に定義より

$$a_1 + b_2 = b_1 + a_2, \qquad c_1 + d_2 = d_1 + c_2$$

となる．結合法則と交換法則より

$$(a_1+c_1)+(b_2+d_2) = (a_1+b_2)+(c_1+d_2) = (b_1+a_2)+(d_1+c_2) = (b_1+d_1)+(a_2+c_2)$$

であり，同値関係 $\sim$ の定義より $(a_1+c_1, b_1+d_1) \sim (a_2+c_2, b_2+d_2)$ が成り立つ．したがって，

$$[(a_1,b_1)]\,\#\,[(c_1,d_1)] = [(a_1+c_1, b_1+d_1)] = [(a_2+c_2, b_2+d_2)] = [(a_2,b_2)]\,\#\,[(c_2,d_2)]$$

となり，代表元の取り方に依存せずにうまく定義されている．■