解析学概論　解答例

2012.07.01

■　$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の二項関係 $\approx$ を

$$(a_1, b_1) \approx (a_2, b_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$$

により定義するとき，$\approx$ は X 上の同値関係であることを示せ．

(解) (1) $a \cdot b = b \cdot a$ と定義より $(a, b) \approx (a, b)$ である．(2) $(a_1, b_1) \approx (a_2, b_2)$ とすると，$a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$ と交換法則より

$$a_2 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot b_2 = b_2 \cdot a_1$$

であるから，定義より $(a_2, b_2) \approx (a_1, b_1)$ である．(2) $(a_1, b_1) \approx (a_2, b_2)$，$(a_2, b_2) \approx (a_3, b_3)$ とする．定義より $a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$，$a_2 \cdot b_3 = b_2 \cdot a_3$ より

$$(a_1 \cdot b_3) \cdot b_2 = (a_1 \cdot b_2) \cdot b_3 = (b_1 \cdot a_2) \cdot b_3 = b_1 \cdot (a_2 \cdot b_3) = b_1 \cdot (b_2 \cdot a_3) = (b_1 \cdot a_3) \cdot b_2$$

となる．$b_2 \neq 0$ と簡約法則より $a_1 \cdot b_3 = b_1 \cdot a_3$ が得られ，定義より $(a_1, b_1) \approx (a_3, b_3)$ である．以上より，$\approx$ は X 上の同値関係である．■