解析学概論　解答例

2012.07.08

■　$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係

$$(a_1, b_1) \approx (a_2, b_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$$

に関する (a, b) を代表元とする同値類を $\langle (a, b) \rangle$ とする．$\mathbb{Q} = X/\!\approx$ 上の演算 $\#$ を

$$\langle (a_1, b_1) \rangle \# \langle (a_2, b_2) \rangle = \langle (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1, b_1 \cdot b_2) \rangle$$

により定義するとき，演算 $\#$ は代表元の取り方に依存せずうまく定義できていることを示せ．

(解)　$\langle (a_1, b_1) \rangle = \langle (\tilde{a}_1, \tilde{b}_1) \rangle$ かつ $\langle (a_2, b_2) \rangle = \langle (\tilde{a}_2, \tilde{b}_2) \rangle$ とする．このとき，$(a_1, b_1) \approx (\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)$，$(a_2, b_2) \approx (\tilde{a}_2, \tilde{b}_2)$ であるから，$a_1 \cdot \tilde{b}_1 = b_1 \cdot \tilde{a}_1$，$a_2 \cdot \tilde{b}_2 = b_2 \cdot \tilde{a}_2$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot (\tilde{b}_1 \cdot \tilde{b}_2) =& (a_1 \cdot \tilde{b}_1) \cdot (b_2 \cdot \tilde{b}_2) + (a_2 \cdot \tilde{b}_2) \cdot (b_1 \cdot \tilde{b}_1) \\ =& (b_1 \cdot \tilde{a}_1) \cdot (b_2 \cdot \tilde{b}_2) + (b_2 \cdot \tilde{a}_2) \cdot (b_1 \cdot \tilde{b}_1) = (b_1 \cdot b_2) \cdot (\tilde{a}_1 \cdot \tilde{b}_2 + \tilde{a}_2 \cdot \tilde{b}_1)\end{aligned}$$

より $(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1, b_1 \cdot b_2) \approx (\tilde{a}_1 \cdot \tilde{b}_2 + \tilde{a}_2 \cdot \tilde{b}_1, \tilde{b}_1 \cdot \tilde{b}_2)$ であるから，$\langle (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1, b_1 \cdot b_2) \rangle \approx \langle (\tilde{a}_1 \cdot \tilde{b}_2 + \tilde{a}_2 \cdot \tilde{b}_1, \tilde{b}_1 \cdot \tilde{b}_2) \rangle$ が成り立つ．したがって，演算 $\#$ は代表元の取り方に依存せずうまく定義できている．■