解析学概論　解答例

2012.07.22

■　関数 $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ を

$$f(p,q) = \frac{(p+q)\,(p+q+1)}{2} + q + 1$$

により定義するとき，f は全単射であることを示せ．

(解)　任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\frac{\ell\,(\ell+1)}{2} < r \leq \frac{(\ell+1)\,(\ell+2)}{2}$$

をみたす $\ell \in \mathbb{N}_0$ がとれ，

$$q = r - \frac{\ell\,(\ell+1)}{2} - 1, \qquad p = \ell - q$$

とおくと，

$$0 \leq q \leq \frac{(\ell+1)\,(\ell+2)}{2} - \frac{\ell\,(\ell+1)}{2} - 1 = \ell$$

より $(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ であり，$f(p,q) = r$ が成り立つ．したがって，f は全射である．次に，f が単射であることを示すために，$f(p_1,q_1) = f(p_2,q_2)$ とする．$p_1 + q_1 > p_2 + q_2$ のとき，$p_1 + q_1 \geq p_2 + q_2 + 1$ より

$$\begin{aligned} f(p_2,q_2) \leq& \frac{(p_2+q_2)\,(p_2+q_2+1)}{2} + p_2 + q_2 + 1 = \frac{(p_2+q_2+1)\,(p_2+q_2+2)}{2} \\ \leq& \frac{(p_1+q_1)\,(p_1+q_1+1)}{2} < f(p_1,q_1) \end{aligned}$$

となり，矛盾である．$p_1 + q_1 < p_2 + q_2$ のときにも，同様に矛盾が導かれるので，$p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ でなければならない．

$$0 = f(p_1,q_1) - f(p_2,q_2) = q_1 - q_2$$

より，$p_1 = p_2$，$q_1 = q_2$ が得られ，f は単射である．■