解析学 I　解答例

2014.10.14

■　$0 \leq k < n$ をみたす整数 k，n に対して，二項係数

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} $$

は関係式

$$ {}_{n+1}C_{k+1} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1} $$

をみたすことを示せ．また，$0 \leq k \leq n$ をみたすすべての自然数 n と整数 k に対して ${}_nC_k$ は自然数であることを示せ．

(解)　整数 $k \geq 0$ に対して $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$ であることに注意すると，

$$ \begin{aligned} {}_{n+1}C_{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot \{(n+1)-(k+1)\}!} = \frac{\{(n-k)+(k+1)\} \cdot n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot \{n-(k+1)\}!} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1} \end{aligned} $$

が得られる．$P(n)$ を「$0 \leq k \leq n$ をみたす整数 k に対して ${}_nC_k$ は自然数である」という命題関数とする．

(1) 計算により ${}_1C_0 = {}_1C_1 = 1$ が得られるので，$P(1)$ は真である．

(2) $P(n)$ が真である，つまり，$0 \leq k \leq n$ をみたす整数 k に対して ${}_nC_k$ は自然数であると仮定する．$1 \leq k \leq n$ のとき，前半より

$$ {}_{n+1}C_k = {}_nC_{k-1} + {}_nC_k $$

であるから，${}_{n+1}C_k$ は自然数である．また，二項係数の定義より ${}_{n+1}C_0 = {}_{n+1}C_{n+1} = 1$ であるから，$P(n+1)$ も真である．

数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $P(n)$ は真である，つまり，$0 \leq k \leq n$ をみたすすべての自然数 n と整数 k に対して ${}_nC_k$ は自然数である．■