解析学 I　解答例

2014.10.20

■　2 点 $\mathrm{S}(u_1, u_2)$，$\mathrm{T}(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ は $0 < \angle\mathrm{SOT} < \pi$ をみたすものとし，$\mathbb{R}^2$ における領域 P を

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = \alpha\,(u_1,u_2) + \beta\,(v_1,v_2),\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0 \right\}$$

により定める．ここで，(x,y) は $\mathbb{R}^2$ の点であるとともに，2 次元ベクトルともみなすことにする．二項関係 $\preceq$ を

$$(x_1,y_1) \preceq (x_2,y_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_2,y_2) - (x_1,y_1) \in P$$

により定義するとき，二項関係 $\preceq$ は $\mathbb{R}^2$ における順序関係であることを示せ．

(解)　$0 < \angle\mathrm{SOT} < \pi$ より，2 次元ベクトル (u_1,u_2) と (v_1,v_2) は一次独立であることに注意したい．(1) すべての $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $(x,y) - (x,y) = (0,0) \in P$ であるから，$(x,y) \preceq (x,y)$ が成り立つ．(2) $(x_1,y_1) \preceq (x_2,y_2)$，$(x_2,y_2) \preceq (x_1,y_1)$ とする．ある α_1，β_1，α_2，$\beta_2 \geq 0$ が取れて，

$$(x_2,y_2) - (x_1,y_1) = \alpha_1\,(u_1,u_2) + \beta_1\,(v_1,v_2), \qquad (x_1,y_1) - (x_2,y_2) = \alpha_2\,(u_1,u_2) + \beta_2\,(v_1,v_2)$$

と表せ，

$$(0,0) = \{(x_2,y_2) - (x_1,y_1)\} + \{(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\} = (\alpha_1 + \alpha_2)\,(u_1,u_2) + (\beta_1 + \beta_2)\,(v_1,v_2)$$

となる．(u_1,u_2) と (v_1,v_2) は一次独立であるから，$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$，$\beta_1 + \beta_2 = 0$ である．α_k，β_k　$(k = 1,\ 2)$ の非負性により，$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ であり，$(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ が成り立つ．(3) $(x_1,y_1) \preceq (x_2,y_2)$，$(x_2,y_2) \preceq (x_3,y_3)$ とすると，ある α_1，β_1，α_2，$\beta_2 \geq 0$ が取れて，

$$(x_2,y_2) - (x_1,y_1) = \alpha_1\,(u_1,u_2) + \beta_1\,(v_1,v_2), \qquad (x_3,y_3) - (x_2,y_2) = \alpha_2\,(u_1,u_2) + \beta_2\,(v_1,v_2)$$

と表せ，$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$，$\beta_1 + \beta_2 \geq 0$ より

$$\begin{aligned}(x_3,y_3) - (x_1,y_1) &= \{(x_2,y_2) - (x_1,y_1)\} + \{(x_3,y_3) - (x_2,y_2)\} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)\,(u_1,u_2) + (\beta_1 + \beta_2)\,(v_1,v_2) \in P,\end{aligned}$$

つまり，$(x_1,y_1) \preceq (x_3,y_3)$ が成り立つ．以上から，二項関係 $\preceq$ は $\mathbb{R}^2$ における順序関係である．■