解析学 I　解答例

2014.10.27

■　$\mathbb{R}$ の部分集合

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad A_2 = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

それぞれに対して上限および下限を求めよ．

(解)　A_1 について： 任意の $x \in A_1$ に対して，ある自然数 n を用いて $x = 1/n$ と表され，$0 < x = 1/n \leq 1$ であるから，$a \geq 1$ ならば $a \in U(A_1)$，$a \leq 0$ ならば $a \in L(A_1)$ である．$a < 1$ のとき，$a < 1 = 1/1 \in A_1$ となり，a は A_1 の上界ではない，つまり，$a \notin U(A_1)$ である．また，$a > 0$ のとき，$m = [1/a] + 1$ とおくと，$m \in \mathbb{N}$ であり，$1/a < m$ となるので，$a > 1/m \in A_1$ より a は A_1 の下界ではない，つまり，$a \notin L(A)$ である．したがって，

$$\begin{aligned} U(A_1) =& [1, +\infty), \qquad \sup A_1 = \min U(A_1) = 1, \\ L(A_1) =& (-\infty, 0], \qquad \inf A_1 = \max L(A_1) = 0 \end{aligned}$$

である．

A_2 について： 任意の $x \in A_2$ に対して，ある自然数 n が存在して，

$$0 \leq x = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{5}{6}$$

が成り立つので，$a \geq 5/6$ ならば $a \in U(A_2)$，$a \leq 0$ ならば $a \in L(A_2)$ である．$a < 5/6$ ならば，$5/6 \in A_2$ より a は上界ではない，つまり，$a \notin U(A_2)$ である．また，$a > 0$ ならば，$0 \in A_2$ より a は下界ではない，つまり，$a \notin L(A_2)$ である．したがって，

$$\begin{aligned} U(A_2) =& \left[\frac{5}{6}, +\infty\right), \qquad \sup A_2 = \min U(A_2) = \frac{5}{6}, \\ L(A_2) =& (-\infty, 0], \qquad \inf A_2 = \max L(A_2) = 0 \end{aligned}$$

である．■