解析学 I　解答例

2014.11.17

■　整数 f_k　($k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$) を係数とする多項式

$$f(x) = x^n + f_{n-1}\,x^{n-1} + f_{n-2}\,x^{n-2} + \cdots + f_1\,x + f_0$$

に対して，方程式 $f(x)=0$ が有理数解をもてば，その解は整数であることを示せ．

(解)　方程式 $f(x)=0$ の有理数解 α は，互いに素な $u\in\mathbb{Z}$，$v\in\mathbb{N}$ を用いて，$\alpha=u/v$ と表すことができる．$v\geq 2$ と仮定する．このとき，v は 2 以上の素数で割り切れることに注意したい．$f(u/v)=0$ より

$$u^n = -v\,\left(f_{n-1}\,u^{n-1} + f_{n-2}\,u^{n-2}\,v + \cdots + f_1\,u\,v^{n-2} + f_0\,v^{n-1}\right)$$

が得られ，u^n は v で割り切れる．$\hat{v}\geq 2$ を v の任意の素因数とすると，u は $\hat{v}$ で割り切れなければならない．つまり，u と v の最大公約数は $\hat{v}$ 以上である．これは u と u が互いに素であることに反する．したがって，$v=1$ でなければならない，つまり，解 $\alpha=u\in\mathbb{Z}$ である．■