解析学 I　解答例

2014.12.01

■　正の実数 a と自然数 n に対して，$\mathbb{R}$ の部分集合 $A = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0$ かつ $x^n \leq a \,\}$ は上に有界であることを示せ．

(解)　$b = \max(1, a)$ とおくと，

$$b^n = \begin{cases} a^n > a & \quad (a > 1) \\ 1^n \geq a & \quad (a \leq 1) \end{cases}$$

であるから，すべての $x \in A$ に対して $x^n \leq a \leq b^n$ が得られる．また，非負の実数 x，y に対して，

$$x^n - y^n = (x - y)\,(x^{n-1} + x^{n-2}\,y + \cdots + x\,y^{n-2} + y^{n-1})$$

より

$$x^n \leq y^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq y$$

が成り立つことに注意すると，すべての $x \in A$ に対して $x \leq b$ である，つまり，b は A の上界である．したがって，A は上に有界である．■