解析学 I　解答例

2014.12.15

■　アルキメデスの原理「任意の正の実数 x，y に対して，ある自然数 n が取れて，$x < n \cdot y$ が成り立つ」ことを示せ．

(解)　背理法で示す．ある正の実数 x，y が存在して，すべての自然数 n に対して $x \geq n \cdot y$ が成り立つと仮定する．A を

$$A = \{\, n\,y \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$$

により定義すると，A は空でない有界な $\mathbb{R}$ の部分集合であるから，$s = \sup A$ が存在する．s は A の上界であるから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \cdot y \leq s$ である．$\varepsilon = y > 0$ とおくと，$s - \varepsilon$ は A の上界ではないから，ある $m \in \mathbb{N}$ が取れて，$s - \varepsilon < m \cdot y$ が成り立つ．$m + 1 \in \mathbb{N}$ より $(m+1) \cdot y \in A$ であるから

$$(m+1) \cdot y \leq s < m \cdot y + \varepsilon = (m+1) \cdot y$$

となり，矛盾である．したがって，アルキメデスの原理が成り立つ．■