解析学 I　解答例

2014.12.22

■　極限の定義に従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right\}=1$ であることを示せ．

(解)　任意に $\varepsilon>0$ をとる．アルキメデスの原理より，ある $n_0\in\mathbb{N}$ が取れて，$n_0\cdot\varepsilon>1$ が成り立つ．このとき，すべての自然数 $n\geq n_0$ に対して，$n+1>0$ より

$$\left|\left\{1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right\}-1\right|=\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{n+(n+1)}<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon$$

となる．極限の定義より，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right\}=1$$

が成り立つ．■