解析学 I　解答例

2015.01.19

■　$0 < r < 1$ とし，$h = \dfrac{1}{r} - 1$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < r^n \leq \dfrac{1}{n\,h}$ が成り立つことを示せ．

(2)　定義に従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であることを示せ．

(解) (1) $h > 0$ であることに注意したい．二項定理より

$$\left(\frac{1}{r}\right)^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, h^k \geq {}_nC_1\, h^1 = n\,h$$

となるので，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < r^n \leq 1/(n\,h)$ が成り立つ．(2) $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\varepsilon\,h > 0$ とアルキメデスの原理により，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ がとれて，$n_0\,(\varepsilon\,h) > 1$ が成り立つ．すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して，

$$-\varepsilon < 0 < r^n \leq \frac{1}{n\,h} \leq \frac{1}{n_0\,h} < \varepsilon, \qquad \text{つまり，} |\,r^n\,| = |\,r^n - 0\,| < \varepsilon$$

となる．極限の定義より，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ である．■