解析学 I　解答例

2015.01.26

■　ネイピア数

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

を用いて，極限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

を求めよ．

（解） 実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ と表すと，$[x] \leq x < [x]+1$ が成り立つので，

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

が得られる．$x \to +\infty$ のとき $n = [x] \to \infty$ であるから，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right] = e\cdot 1^{-1} = e, \\
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e\cdot 1 = e
\end{aligned}$$

となり，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

である．■