解析学 II　解答例

2014.04.14

■　数列 $\{ p_n \}$ を与えて，数列 $\{ x_n \}$ を

$$x_1 > 0, \qquad x_{n+1} = p_n \, x_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定義する．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < p_n < 1$ がみたされるとき，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ が成り立つかどうかを調べよ．

(解)　数列 $\{ p_n \}$，$\{ x_n \}$ を

$$p_n = \frac{n\,(n+2)}{(n+1)^2}, \qquad x_n = \frac{n+1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

とすると，$x_1 = 2 > 0$ であり，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{n+2}{n+1}}{\dfrac{n+1}{n}} = \frac{n\,(n+2)}{(n+1)^2} = p_n < 1$$

が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 > 0$$

より，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < p_n < 1$ がみたされたとしても，一般に $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ が成り立つとは限らない．■