解析学 II　解答例

2014.04.21

■　$0 \leq \gamma \leq 1$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \gamma\, a_n\,(1 - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定義するとき，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するかどうか調べよ．

（解） (i) 明らかに，$0 \leq a_1 \leq 1/2$ が成り立つ．(ii) $0 \leq a_n \leq 1/2$ と仮定すると，

$$0 \leq a_{n+1} = \gamma\, a_n\,(1 - a_n) = -\gamma\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\gamma}{4} \leq \frac{\gamma}{4} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

となる．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq a_n \leq 1/2$ が成り立つ．このことから，$\{a_n\}$ は下に有界であり，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_{n+1} = \gamma\, a_n\,(1 - a_n) \leq \gamma\, a_n \leq a_n$$

である，つまり，$\{a_n\}$ は単調減少数列である．したがって，極限 $s = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する．

$s = \inf\{a_n\,|n \in \mathbb{N}\}$ より，$0 \leq s \leq 1/2$ である．$s > 0$ と仮定する．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $s \leq a_n \leq 1/2$ であるから，$n \to \infty$ のとき，$0 \leq \gamma\,(1-s) < 1$ より

$$0 < s \leq a_n = \gamma\, a_{n-1}\,(1 - a_{n-1}) \leq \gamma\,(1-s)\; a_{n-1} \leq \cdots \leq \{\gamma\,(1-s)\}^{n-1}\; a_1 = \frac{\{\gamma\,(1-s)\}^{n-1}}{2} \to 0$$

となり，矛盾である．したがって，$s = 0$，つまり，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ．■