# 解析学 II　解答例

2014.04.28

■　$1 < \gamma \leq 2$ とし，数列 $\{ a_n \}$ を

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \gamma\, a_n\, (1 - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定義するとき，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するかどうか調べよ．

**(解)**　$a_* = (\gamma - 1)/\gamma$，$f(x) = \gamma\, x\,(1 - x)$ とおくと，$0 < a_* = f(a_*) \leq 1/2$ が成り立つことに注意したい．

　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_* \leq a_n \leq 1/2$ であることを示そう．(i) 明らかに，$a_* \leq a_1 \leq 1/2$ が成り立つ．(ii) $a_* \leq a_n \leq 1/2$ と仮定すると，

$$a_{n+1} = f(a_n) = -\gamma \left( a_n - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\gamma}{4}$$

より

$$a_* = f(a_*) \leq a_{n+1} = f(a_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\gamma}{4} \leq \frac{1}{2}$$

が得られる．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_* \leq a_n \leq 1/2$ が成り立つ．このことから，$\{ a_n \}$ は下に有界である．また，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_{n+1} - a_n = \gamma\, a_n\, (1 - a_n) - a_n = \gamma\, a_n\, (a_* - a_n) \leq 0$$

であるから，$\{ a_n \}$ は単調減少数列である．したがって，極限 $s = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する．$s \geq a_* > 0$ であり，

$$s = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \{\gamma\, a_n\, (1 - a_n)\} = \gamma\, s\, (1 - s)$$

であるから，$s = a_*$，つまり，$\lim_{n\to\infty} a_n = a_*$ が成り立つ．■