# 解析学 II　解答例

2014.05.12

■　自然数 $n \geq 2$，実数 $a \geq 0$，有理数 $b \geq 0$ が $b^n > a$ をみたすとする．

$$H = \min\left\{1, \frac{b^n - a}{2\,\gamma}\right\}, \qquad \gamma = \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k\, b^{n-k}$$

とおくと，すべての $0 < h \leq H$ に対して $(b-h)^n > a$ が成り立つことを示せ．

**（解）** $H$ の定義より $0 < h \leq 1$，$0 < h \leq \dfrac{b^n - a}{2\,\gamma}$ であるから，

$$\begin{aligned}(b-h)^n =& b^n + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k\, b^{n-k}\,(-h)^k \geq b^n - \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k\, b^{n-k}\, h^k = b^n - h\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k\, b^{n-k}\, h^{k-1} \\ \geq& b^n - h\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k\, b^{n-k} = b^n - h\,\gamma \geq b^n - \frac{b^n - a}{2} = \frac{b^n + a}{2} > a\end{aligned}$$

が成り立つ．■