解析学 II　解答例

2014.06.16

■　狭義単調増加な自然数列 $\{ n_k \}$ において，すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $n_k \geq k$ が成り立つことを示せ．

(解) 数列 $\{ a_n \}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < a_{n+1}$ をみたすとき，$\{ a_n \}$ は**狭義単調増加**であるということに注意したい．(a) $n_1 \in \mathbb{N}$ より $n_1 \geq 1$ である．(b) $n_k \geq k$ が成り立つと仮定すると，$\{ n_k \}$ が狭義単調増加な自然数列であることから，すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $n_{k+1} - n_k \geq 1$ となるので，

$$n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$$

が成り立つ．数学的帰納法により，すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $n_k \geq k$ が成り立つ．■