解析学 II　解答例

2014.06.23

■　数列 $\{a_k\}$ を

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義するとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ であることを示せ．

（解） 実数 x に対して x を超えない最大の整数を $[x]$ と表し，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $N(n) = [\log_2 n]$ とおく．また，$k_2 < k_1$ のときには $\sum_{k=k_1}^{k_2} a_k = 0$ とする．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} a_n =& 1 + \sum_{\ell=1}^{N(n)} \sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^{N(n)}+1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1 + \sum_{\ell=1}^{N(n)} \sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} \frac{1}{k} \geq 1 + \sum_{\ell=1}^{N(n)} \sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} \frac{1}{2^\ell} \\ =& 1 + \sum_{\ell=1}^{N(n)} \frac{2^\ell - 2^{\ell-1}}{2^\ell} = 1 + \sum_{\ell=1}^{N(n)} \frac{1}{2} = 1 + \frac{N(n)}{2} \geq 1 + \frac{\log_2 n - 1}{2} = \frac{1 + \log_2 n}{2} \end{aligned}$$

が得られるので，$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ である．■