

解析学 II 解答例

2014.06.30

■ 任意の実数 x, y に対して関数 $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

により定めるとき, すべての実数 x, y, z に対して $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ が成り立つことを示せ.

(解) 三角不等式により, すべての実数 x, y, z に対して $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ が成り立つことに注意したい. 関数 $x/(1+x)$ は $x \geq 0$ の範囲において単調増加関数であるから, すべての実数 x, y, z に対して

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} \leq \frac{|x - y| + |y - z|}{1 + |x - y| + |y - z|} \\ &\leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y| + |y - z|} + \frac{|y - z|}{1 + |x - y| + |y - z|} \\ &\leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z|} = d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

となる. ■