解析学概論　解答例

2014.04.14

■　$p \geq 2$ を素数とする．このとき，$\sqrt{p}$ は有理数でないことを示せ．

(解)　a と b を整数，p を素数とするとき，$a\,b$ が p で割り切れれば，a または b が p で割り切れることに注意したい．[*1]

$\sqrt{p}$ が有理数と仮定する．このとき，互いに素な自然数 n，m を用いて，$\sqrt{p} = m/n$ と表せる．$m^2 = p\,n^2$ より，m^2 は p で割り切れるので，m も p で割り切れる．つまり，自然数 $\hat{m}$ を用いて $m = p\,\hat{m}$ と表せる．代入して整理し直すと，$n^2 = p\,\hat{m}^2$ となり，同様の議論により，n は p で割り切れる．これは n と m が互いに素であることに反する．したがって，$\sqrt{p}$ は有理数ではない．■

[*1] $a\,b$ が p で割り切れ，かつ，a と b が p で割り切れないと仮定する．a と b それぞれを p で割ったときの商を q_1，q_2，余りを r_1，r_2 とすると，

$$a = p\,q_1 + r_1, \qquad 1 \leq r_1 < p, \qquad b = p\,q_2 + r_2, \qquad 1 \leq r_2 < p$$

であり，r_1 と r_2 のすべての素因数は p より小さい．p が素数であることから，p は $r_1\,r_2$ の素因数ではない．また，

$$a\,b = p\,(p\,q_1\,q_2 + q_1\,r_2 + q_2\,r_1) + r_1\,r_2$$

より，$r_1\,r_2 \geq 1$ は p で割り切れる，つまり，p は $r_1\,r_2$ の素因数となり，矛盾である．したがって，$a\,b$ が p で割り切れれば，a または b は p で割り切れる．