

■ 写像 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を

$$f(p, q) = \frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2} + q, \quad (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

により定義するとき, f は全単射であることを示せ.

(解) 全射: 自然数 n を任意にとる. このとき,

$$\frac{r(r+1)}{2} < n \leq \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

をみたす整数 $r \geq 0$ が存在するので,

$$q = n - \frac{r(r+1)}{2}$$

とおくと, $q \in \mathbb{N}$ であり,

$$1 \leq p \leq \frac{(r+1)(r+2)}{2} - \frac{r(r+1)}{2} = r+1$$

である. $p = r+2-q$ とおくと, $p \in \mathbb{N}$ であり,

$$1 = r+2 - (r+1) \leq p \leq r+2 - 1 = r+1$$

が成り立つ. $r = p+q-2$ より

$$n = \frac{(p+q-2)\{(p+q-2)+1\}}{2} + q = \frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2} + q = f(p, q)$$

となり, f は全射である.

単射: $f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2)$ とし, $\ell_1 = p_1 + q_1$, $\ell = p_2 + q_2$ とおく. 一般性を失うことなく, $2 \leq \ell_1 \leq \ell_2$ と仮定できる. もし $\ell_1 < \ell_2$ ならば, $\ell_1 + 1 \leq \ell_2$ より

$$\begin{aligned} f(p_1, q_1) &= \frac{(\ell_1-1)(\ell_1-2)}{2} + q_1 \leq \frac{(\ell_1-1)(\ell_1-2)}{2} + (\ell_1-1) = \frac{\ell_1(\ell_1-1)}{2} \\ &= \frac{\{(\ell_1+1)-1\}\{(\ell_1+1)-2\}}{2} \leq \frac{(\ell_2-1)(\ell_2-2)}{2} < f(p_2, q_2) \end{aligned}$$

となり, 矛盾である. したがって, $\ell_1 = \ell_2$, つまり, $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ であるから,

$$0 = f(p_1, q_1) - f(p_2, q_2) = q_1 - q_2$$

より $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ が成り立つ. これは f が単射であることを示している. ■