

■ 次の問いに答えよ.

- (1) 関数 $\sqrt{x}$ を定義せよ.
- (2) すべての x に対して $\sqrt{x^2} = |x|$ であることを示せ.

(解) (1) $n \in \mathbb{N}$, $R = [0, +\infty)$ とし, 関数 $f: R \rightarrow R$ を $f(x) = x^n$ により定義する. $x_1 > x_2 \geq 0$ ならば

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) \sum_{k=0}^{n-1} x_1^k x_2^{n-1-k} > 0$$

が成り立つので, f は単射である. また, 任意の $b \in R$ に対して $b = a^n$ をみたす $a \in R$ が存在する^{*1}ので, f は全射である. f は全単射であるから, f の逆関数が存在し, それを $\sqrt[n]{x}$ または $x^{\frac{1}{n}}$ と表す. 特に, $n = 2$ の場合には $\sqrt{x}$ と表す.

(2) $y = \sqrt[n]{x}$ は方程式 $y^n = x$ をみたす解 $y \in R$ であることに注意すると, $y = \sqrt{x^2}$ は方程式 $y^2 = x^2$, つまり,

$$0 = y^2 - x^2 = (y + x)(y - x)$$

の非負であるから, $x \geq 0$ のときには $y = x$, $x < 0$ のときには $y = -x$ となる. したがって, $y = |x|$ である. ■

^{*1} この詳細は実数を構成する際に述べる.