解析学概論　解答例

2014.05.19

■　$X = \mathbb{Z}$ における二項関係 $\triangle$ を

$$x \triangle y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - y \text{ は } 3 \text{ で整除される}$$

により定義すると，$\triangle$ は X 上の同値関係である（証明は省略してよい）．$C(a)$ を a を代表元とする同値関係 $\triangle$ に関する同値類とするとき，$X = C(0) \cup C(1) \cup C(2)$ が成り立つことを示せ．

（解） $K = \{0, 1, 2\}$ とする．同値類の定義より，すべての $k \in K$ に対して $C(k) \subset X$ であるから，$C(0) \cup C(1) \cup C(2) \subset X$ が成り立つ．また，任意に $x \in X$ を取ると，x を 3 で割ったときの商を $\ell \in \mathbb{Z}$, 余りを $k \in K$ とすると，$x = 3 \cdot \ell + k$ と表せる．$x - k = 3 \cdot \ell$ より $x \in C(k) \subset C(0) \cup C(1) \cup C(2)$ となるので，$X \subset C(0) \cup C(1) \cup C(2)$ が得られる．したがって，$X = C(0) \cup C(1) \cup C(2)$ が成り立つ．■