解析学概論　解答例

2014.05.26

■　関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{\sin(n+1)\,x}{\sin x}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

により定義する．このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n(x)$ は n 次多項式 $P_n(z)$ を用いて $f_n(x) = P_n(\cos x)$ と表されることを示せ．

(解)　各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，三角関数の和積公式より

$$\sin{(n+1)}\ x + \sin{(n-1)}\ x = 2\ \sin n\,x\ \cos x$$

となるので，関係式

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = \frac{\sin{(n+1)}\ x + \sin{(n-1)}\ x}{\sin x} = \frac{2\ \sin n\,x\ \cos x}{\sin x} = 2\ \cos x\, f_n(x) \tag{1}$$

が成り立つことに注意して，すべての $n \geq 2$ に対して，命題

Q_n ：すべての $k \leq n$ に対して，k 次多項式 $P_k(z)$ を用いて，$f_k(x)$ は $f_k(x) = P_k(\cos x)$ と表される，

ことを示す．(i) 加法定理より

$$f_1(x) = \frac{\sin 2\,x}{\sin x} = 2\ \cos x, \qquad f_2(x) = \frac{\sin 3\,x}{\sin x} = 4\ \cos^2 x - 1$$

となる．$P_1(z) = 2\,z$，$P_2(z) = 4\,z^2 - 1$ とおくと，$f_1(z) = P_1(\cos x)$，$f_2(x) = P_2(\cos x)$ であるから，命題 Q_2 が成り立つ．(ii) $n \geq 2$ のとき命題 Q_n が成り立つと仮定する．このとき，すべての $k \leq n$ に対して，k 次多項式 $P_k(z)$ を用いて，$f_k(x)$ は $f_k(x) = P_k(\cos x)$ と表される．

$$P_{n+1}(z) = 2\,z\,P_n(z) - P_{n-1}(z)$$

とおくと，$P_{n-1}(z)$ は $(n-1)$ 次多項式，$P_n(z)$ は n 次多項式であるから，$P_{n+1}(z)$ は $(k+1)$ 次多項式であり，関係式 (1) より $f_{n+1}(x) = P_{n+1}(\cos x)$ と表される．したがって，命題 Q_{n+1} も成り立つ．数学的帰納法により，すべての $n \geq 2$ に対して命題 Q_n が成り立つ．したがって，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f_n(x)$ は n 次多項式 $P_n(z)$ を用いて $f_n(x) = P_n(\cos x)$ と表される．■