解析学概論　解答例

2014.06.02

■　$0 \le k < n$ をみたす整数 k，n に対して，二項係数

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} $$

は関係式

$$ {}_{n+1}C_{k+1} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1} $$

をみたすことを示せ．また，$0 \le k \le n$ をみたすすべての自然数 n と整数 k に対して ${}_nC_k$ は自然数であることを示せ．

(解)　0 以上の整数 k に対して $(k+1)! = (k+1)\cdot k!$ であることに注意すると，

$$ \begin{aligned} {}_{n+1}C_{k+1} =& \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot\{(n+1)-(k+1)\}!} = \frac{\{(n-k)+(k+1)\}\cdot n!}{(k+1)\cdot k!\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)!} \\ =& \frac{n!}{k!\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)\cdot k!\cdot(n-k-1)!} \\ =& \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot\{n-(k+1)\}!} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1} \end{aligned} $$

が得られる．また，自然数 n に対して，

$P(n)$： すべての整数 k　$(0 \le k \le n)$ に対して ${}_nC_k$ は自然数である

ことを示す．(i) 二項係数の定義と $0! = 1$ であることから，${}_1C_0 = 1$，${}_1C_1 = 1$ となるので，$P(1)$ が成り立つ．(ii) $P(\ell)$ が成り立つと仮定する．二項係数の定義と $0! = 1$ であることから，${}_{\ell+1}C_0 = 1$，${}_{\ell+1}C_{\ell+1} = 1$ が得られる．任意の整数 k　$(1 \le k \le \ell)$ に対して，仮定より ${}_\ell C_{k-1}$，${}_\ell C_k$ は自然数だから，

$$ {}_{\ell+1}C_k = {}_{\ell+1}C_{k-1} + {}_{\ell+1}C_k $$

より ${}_{\ell+1}C_k$ は自然数である．したがって，$P(\ell+1)$ が成り立つ．数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つ，つまり，$0 \le k \le n$ をみたすすべての自然数 n と整数 k に対して ${}_nC_k$ は自然数である．■