解析学概論　解答例

2014.06.09

■　各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$\Phi_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ を帰納的に

$$\Phi_n(0) = n, \qquad \Phi_n(S(m)) = S(\Phi_n(m)) \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

により定義する．このとき，すべての n，$m \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\Phi_{S(m)}(n) = \Phi_m(S(n)) \tag{E}$$

が成り立つことを示せ．

（解） m を任意に取り固定する．(a)

$$(\text{左辺}) = \Phi_{S(m)}(0) \overset{\text{定義 (i)}}{=} S(m), \qquad (\text{右辺}) = \Phi_m(S(0)) \overset{\text{定義 (ii)}}{=} S(\Phi_m(0)) \overset{\text{定義 (i)}}{=} S(m)$$

より，$n = 0$ のとき (E) が成り立つ．(b) $n = k$ のとき (E) が成り立つと仮定する．

$$\Phi_{S(m)}(S(k)) \overset{\text{定義 (ii)}}{=} S(\Phi_{S(m)}(k)) \overset{\text{仮定}}{=} S(\Phi_m(S(k))) \overset{\text{定義 (ii)}}{=} \Phi_m(S(S(m)))$$

より，$n = S(k)$ のときも (E) が成り立つ．数学的帰納法より，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して (E) が成り立つ．m は任意だから，すべての n，$m \in \mathbb{N}_0$ に対して (E) が成り立つ．■