解析学概論　解答例

2014.06.16

■　各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$\Psi_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ を帰納的に (i) $\Psi_n(0) = 0$，(ii) $\Psi_n(S(m)) = \Psi_n(m) + n$ （$m \in \mathbb{N}_0$）により定義する．このとき，すべての n，m，$k \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\Psi_n(m + n) = \Psi_n(m) + \Psi_n(k) \tag{E}$$

が成り立つことを示せ．

（解） n，$m \in \mathbb{N}_0$ を任意にとり固定し，k に関する数学的帰納法で証明する．加法の定義より，すべての n，$m \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$n + S(m) = \Phi_n(S(m)) = S(\Phi_n(m)) = S(n + m)$$

が成り立つことに注意したい．(a) $k = 0$ のとき，

$$(\text{左辺}) = \Psi_n(m + 0) \overset{\text{単位元}}{=} \Psi_n(m), \qquad (\text{右辺}) = \Psi_n(m) + \Psi_n(0) \overset{\text{(i)}}{=} \Psi_n(m) + 0 \overset{\text{単位元}}{=} \Psi_n(m)$$

より (E) が成り立つ．(b) $k = \ell$ のとき (E) が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned} \Psi_n(m + S(\ell)) &\overset{\text{上記注意}}{=} \Psi_n(S(m + \ell)) \overset{\text{(ii)}}{=} \Psi_n(m + \ell) + n \\ &\overset{\text{仮定}}{=} \Psi_n(m) + \Psi_n(\ell) + n \overset{\text{(ii)}}{=} \Psi_n(m) + \Psi_n(S(\ell)) \end{aligned}$$

より，$k = S(\ell)$ のときも (E) が成り立つ．数学的帰納法より，すべての n，m，$k \in \mathbb{N}_0$ に対して (E) が成り立つ．■