解析学概論　解答例

2014.06.23

■　$X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ とし，X 上の二項関係 $\bigcirc$ を

$$(n_1, m_1) \bigcirc (n_2, m_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

により定義するとき，二項関係 $\bigcirc$ は X 上の同値関係であることを示せ．ここで，演算 $+$ は自然数の集合 $\mathbb{N}_0$ における加法である．

（解） (1) $\bigcirc$ の定義と $n+m = n+m$ より $(n,m) \bigcirc (n,m)$ が成り立つ．(2) $(n_1, m_1) \bigcirc (n_2, m_2)$ であると仮定する．定義より $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ であるから，左辺と右辺を入れ替えることにより $n_2 + m_1 = n_1 + m_2$ となる．定義より $(n_2, m_2) \bigcirc (n_1, m_1)$ が成り立つ．(3) $(n_1, m_1) \bigcirc (n_2, m_2)$ かつ $(n_2, m_2) \bigcirc (n_3, m_3)$ であると仮定する．定義より $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ かつ $n_2 + m_3 = n_3 + m_2$ であるから，

$$\begin{aligned}(n_1 + m_3) + m_2 &\overset{\text{結合・交換}}{=} (n_1 + m_2) + m_3 \overset{\text{仮定}}{=} (n_2 + m_1) + m_3 \\ &\overset{\text{結合・交換}}{=} (n_2 + m_3) + m_1 \overset{\text{仮定}}{=} (n_3 + m_2) + m_1 \overset{\text{結合・交換}}{=} (n_3 + m_1) + m_2\end{aligned}$$

が成り立ち，簡約法則より $n_1 + m_3 = n_3 + m_1$ が得られる．定義より $(n_1, m_1) \bigcirc (n_3, m_3)$ である．以上から，二項関係 $\bigcirc$ は X 上の同値関係である．■