解析学概論　解答例

2014.07.14

■　$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の二項関係 $\Box$ を

$$(q_1, p_1)\Box(q_2, p_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad q_1 \cdot p_2 = q_2 \cdot p_1$$

により定義するとき，$\Box$ は X における同値関係であることを示せ．また，$\Box$ に関する (q, p) を代表元とする同値類を $\langle (q, p) \rangle$ と表し，$\mathbb{Q} = X/\Box$ 上の演算 Ψ を

$$\Psi\left(\langle (q_1, p_1)\rangle, \langle (q_2, p_2)\rangle\right) = \langle (q_1 \cdot q_2, p_1 \cdot p_2)\rangle$$

により定義するとき，演算 Ψ は代表元の取り方に依存せずうまく定義できていることを示せ．

（解）　同値関係について：(i) $q \cdot p = q \cdot p$ より $(q, p)\Box(q, p)$ である．(ii) $(q_1, p_1)\Box(q_2, p_2)$ と仮定すると，$q_1 \cdot p_2 = q_2 \cdot p_1$ が成り立ち，左辺と右辺を入れ替えることにより $q_2 \cdot p_1 = q_1 \cdot p_2$ となり，$(q_2, p_2)\Box(q_1, p_1)$ が得られる．(iii) $(q_1, p_1)\Box(q_2, p_2)$ かつ $(q_2, p_2)\Box(q_3, p_3)$ と仮定する．このとき，$q_1 \cdot p_2 = q_2 \cdot p_1$，$q_2 \cdot p_3 = q_3 \cdot p_2$ が成り立ち，

$$\begin{aligned}(q_1 \cdot p_3) \cdot p_2 &\overset{\text{交換・結合}}{=} (q_1 \cdot p_2) \cdot p_3 \overset{\text{仮定}}{=} (q_2 \cdot p_1) \cdot p_3 \\ &\overset{\text{交換・結合}}{=} (q_2 \cdot p_3) \cdot p_1 \overset{\text{仮定}}{=} (q_3 \cdot p_2) \cdot p_1 \overset{\text{交換・結合}}{=} (q_3 \cdot p_1) \cdot p_2\end{aligned}$$

が得られる．$p_2 > 0$ と簡約法則より，$q_1 \cdot p_3 = q_3 \cdot p_1$，つまり，$(q_1, p_1)\Box(q_3, p_3)$ が成り立つ．以上から，二項関係 $\Box$ は X における同値関係である．

well-defined について：$\langle (q_1, p_1)\rangle = \langle (\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)\rangle$ かつ $\langle (q_2, p_2)\rangle = \langle (\tilde{q}_2, \tilde{p}_2)\rangle$ とする．このとき，$(q_1, p_1)\Box(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$，$(q_2, p_2)\Box(\tilde{q}_2, \tilde{p}_2)$ であるから，$q_1 \cdot \tilde{p}_1 = \tilde{q}_1 \cdot p_1$，$q_2 \cdot \tilde{p}_2 = \tilde{q}_2 \cdot p_2$ が成り立つ．

$$(q_1 \cdot q_2) \cdot (\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2) \overset{\text{交換・結合}}{=} (q_1 \cdot \tilde{p}_1) \cdot (q_2 \cdot \tilde{p}_2) \overset{\text{仮定}}{=} (\tilde{q}_1 \cdot p_1) \cdot (\tilde{q}_2 \cdot p_2) \overset{\text{交換・結合}}{=} (\tilde{q}_1 \cdot \tilde{q}_2) \cdot (p_1 \cdot p_2)$$

より $(q_1 \cdot q_2, b_1 \cdot b_2)\Box(\tilde{q}_1 \cdot \tilde{q}_2, \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2)$ であるから，$\langle (q_1 \cdot q_2, p_1 \cdot p_2)\rangle = \langle (\tilde{q}_1 \cdot \tilde{q}_2, \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2)\rangle$ が成り立つ．したがって，演算 Ψ は代表元の取り方に依存せずうまく定義できている．■