解析学 I　解答例

2015.10.19

■　有理数の集合 $\mathbb{Q}$ の部分集合 A を

$$A = \left\{ a_n \;\middle|\; a_n = 1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

により定めるとき，上界の集合 $U(A)$ および下界の集合 $L(A)$ を求めよ．

（解） (i) $a \leq 0$ ［$a \geq 1$］のとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a \leq 0 \leq 1 - \frac{1}{n} = a_n \qquad \left[\ a \geq 1 > 1 - \frac{1}{n} = a_n\ \right]$$

が成り立つので，上界と下界の定義より $a \in L(A)$, $a \notin U(A)$ ［$a \notin L(A)$, $a \in U(A)$］である．(ii) $0 < a < 1$ のときを考える．下界の定義と

$$a > 0 = 1 - \frac{1}{1} = a_1$$

より，$a \notin L(A)$ である．$[x]$ を x を超えない最大の整数とし，

$$n = \left[\frac{1}{1-a} \right] + 1$$

とおくと，$n \geq 2$ であり，

$$n - 1 \leq \frac{1}{1-a} < n, \qquad \text{つまり，}\quad 1 - \frac{1}{n-1} < a < 1 - \frac{1}{n}$$

が成り立つ．上界の定義より $a \notin U(A)$ である．したがって，$L(A) = (-\infty, 0]$, $U(A) = [1, +\infty)$ である．■