# 解析学 I　解答例

2015.11.02

■　$n$ は $n \geq 4$ をみたす自然数とする．$n$ 個のビーカー $B_1$，$B_2$，$\cdots$，$B_n$ があり，それらにはそれぞれ $x_1\,\mathrm{L}$，$x_2\,\mathrm{L}$，$\cdots$，$x_n\,\mathrm{L}$ の水が入っており，条件

$$x_1 > x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_{n-1} \geq x_n > 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$

をみたしているとする．これらのビーカーに対して，次の操作をビーカーが 1 個になるまで繰り返す．

最も水の量が少ないビーカー 2 個を選び，一方の水全部を他方に移し，空になったビーカーを捨てる．

このとき，ビーカー $B_1$ の水の量 $x_1\,\mathrm{L}$ が $x_1 > 2/5$ の場合について，ビーカーが 2 個になったとき，(1) ビーカー $B_1$ は既に捨てられているかどうか，また (2) ビーカー $B_1$ が捨てられていないときには，水の量が最初の $x_1\,\mathrm{L}$ に比べて増えているかどうかを調べよ．

**(解)**　$k$（$k \geq 3$）個になったとき初めて，水の量が $x_1\,\mathrm{L}$ 以上のビーカーが現れたとする．直前の $(k+1)$ 個のときの各ビーカーの水の量を $x_1\,\mathrm{L}$，$y_2\,\mathrm{L}$，$\cdots$，$y_k\,\mathrm{L}$，$y_{k+1}\,\mathrm{L}$ とすると，

$$y_k + y_{k+1} \geq x_1 > y_2 \geq y_3 \geq \cdots \geq y_k \geq y_{k+1} > 0, \qquad x_1 + \sum_{\ell=2}^{k+1} y_\ell = 1$$

が成り立つ．

$$\frac{2}{5} < x_1 \leq y_k + y_{k+1} \leq 2\,y_k, \qquad \text{つまり，} \quad \frac{1}{5} < y_k \leq y_{k-1} \leq \cdots \leq y_2$$

より

$$\frac{1}{5} = 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} > 1 - x_1 - (y_k + y_{k+1}) = y_2 + \cdots + y_{k-1} \geq (k-2) \cdot y_k > \frac{k-2}{5} \geq \frac{1}{5}$$

となり矛盾である．したがって，$k$（$k \geq 3$）個のときにはビーカー $B_1$ の水の量は $x_1\,\mathrm{L}$ で，その量は他のビーカーの水の量より多い，つまり，ビーカーが 3 個になったとき，水の量を $x_1\,\mathrm{L}$，$u_2\,\mathrm{L}$，$u_3\,\mathrm{L}$ とすると $x_1 > u_2 \geq u_3$ である．さらに操作を行い，ビーカーが 2 個になったとき，ビーカー $B_1$ は残っており，その水の量は変化していない．■