解析学 I　解答例

2015.11.09

■　$0 \leq x \leq 1$ の範囲で，関数 $y = f(x) = 1 - |\,2\,x - 1\,|$,

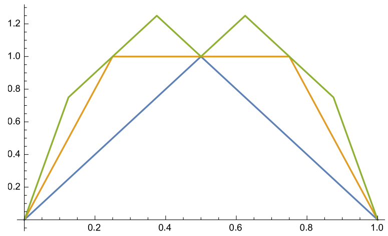
$$y = g(x) = f(x) + \frac{f(f(x))}{2}, \qquad y = h(x) = f(x) + \frac{f(f(x))}{2} + \frac{f(f(f(x)))}{4}$$

のグラフの概形を描け．

（解）　絶対値の定義より

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (1 - 2\,x) = 2\,x & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 1 - (2\,x - 1) = 2 - 2\,x & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

となるので，すべての $0 \leq x \leq 1$ に対して $f(x) = f(1 - x)$，$g(x) = g(1 - x)$，$h(x) = h(1 - x)$ が成り立つ，つまり，関数 $y = f(x)$，$y = g(x)$，$y = h(x)$ のグラフは直線 $x = 1/2$ に関して線対称である．



青色：　$y = f(x)$
橙色：　$y = g(x)$
緑色：　$y = h(x)$

$0 \leq x \leq 1/2$ の範囲では

$$g(x) = 2\,x + \frac{f(2\,x)}{2} = \begin{cases} 2\,x + \{2\,(2\,x)\}/2 = 4\,x & (0 \leq x \leq 1/4) \\ 2\,x + \{2 - 2\,(2\,x)\}/2 = 1 & (1/4 \leq x \leq 1/2) \end{cases}$$

$$h(x) = g(x) + \frac{f(f(2\,x))}{4} = \begin{cases} 4\,x + 2\,\{2\,(2\,x)\}/4 = 6\,x & (0 \leq x \leq 1/8) \\ 4\,x + [2 - 2\,\{2\,(2\,x)\}]/4 = 2\,x + 1/2 & (1/8 \leq x \leq 1/4) \\ 1 + [2 - 2\,\{2 - 2\,(2\,x)\}]/4 = 2\,x + 1/2 & (1/4 \leq x \leq 3/8) \\ 1 + 2\,\{2 - 2\,(2\,x)\}/4 = 2 - 2\,x & (3/8 \leq x \leq 1/2) \end{cases}$$

であるから，関数 $y = f(x)$，$y = g(x)$，$y = h(x)$ のグラフは上図のようになる．■