解析学 I　解答例

2015.11.25

■　(A, B) を $\mathbb{R}$ の切断とし，$\hat{A} = A \cap \mathbb{Q}$，$\hat{B} = B \cap \mathbb{Q}$ とおく．$\gamma = (\hat{A}, \hat{B}) \in \mathbb{R}$ であるとき，命題

$$\forall x \ (x \in A \quad \Longrightarrow \quad x \leq \gamma)$$

が成り立つことを示せ.

（解） $x > \gamma$ と仮定する．有理数の稠密性により，$x > q > \gamma$ をみたす $q \in \mathbb{Q}$ が存在する．二項関係 $<$ の定義より $\hat{A} \subsetneqq \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_q$ であるから，$r \in \hat{B} \setminus \mathbb{Q}_q$ が存在し，$r \leq q$ がみたされる．$r \in \hat{B}$ より $q \in \hat{B} \subset B$ であるから，$x \in B$，つまり，$x \notin A$ となる．対偶をとることにより，示すべき命題が成り立つ．■