解析学 I　解答例

2015.12.07

■　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，不等式

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

が成り立つことを示せ.

（解）　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \geq \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{(n-2)\text{ 個}} \cdot 2 \cdot 1 = 2^{n-1}$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned} 0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {}_nC_k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot 1^{n-k} \right\} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{n^k} \right\} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 3 \end{aligned}$$

が成り立つ.　■