解析学 I　解答例

2015.12.14

■　アルキメデスの原理を用い，定義に従って，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ であることを示せ．

(解)　任意に $\varepsilon > 0$ をとる．アルキメデスの原理より，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れて，$n_0 \cdot \varepsilon > 1$ が成り立つ．このとき，すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して，

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

となる．したがって，命題

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \left(n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\right)$$

が成り立つので，極限の定義より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

が得られる．■