解析学 I　解答例

2015.12.21

■　自然数 n は $n \geq 3$ をみたすものとする．任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，次の命題が真であるかどうかを調べ，真である場合には証明を，偽である場合には反例を示せ．

(i) $x^n + y^n \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 1$

(ii) $x^2 + y^2 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad x^n + y^n \leq 1$

(iii) $|\,x\,|^n + |\,y\,|^n \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 \leq 1$

(iv) $|\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |\,x\,|^n + |\,y\,|^n \leq 1$

(解)　(i)，(iii)：偽である．$x = y = 2^{-1/n}$ は

$$|\,x\,|^n + |\,y\,|^n = x^n + y^n = 2 \cdot (2^{-1/n})^n = 1, \qquad |\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 = x^2 + y^2 = 2 \cdot (2^{-1/n})^2 = 2^{(n-2)/n} > 1$$

をみたす．

(ii)，(iv)：真である．

$$|\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 = x^2 + y^2, \qquad x^n + y^n \leq |\,x\,|^n + |\,y\,|^n$$

より，(iv) が真であれば (ii) も真であるから，(iv) が真であることを示す．$|\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 \leq 1$ より $|\,x\,| \leq 1$, $|\,y\,| \leq 1$ であるから，

$$|\,x\,|^n + |\,y\,|^n = |\,x\,|^{n-2} \cdot |\,x\,|^2 + |\,y\,|^{n-2} \cdot |\,y\,|^2 \leq 1 \cdot |\,x\,|^2 + 1 \cdot |\,y\,|^2 = |\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 \leq 1$$

が成り立つ．■