解析学 I　解答例

2016.01.18

■　2 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

により定義するとき，(1) A の固有値 λ_1，λ_2（$\mathrm{Re}\,\lambda_1 \leq \mathrm{Re}\,\lambda_2$）と対応する固有ベクトル $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ と求め，(2) $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ とするとき，P^{-1} が存在することを示し，$P^{-1}\,A\,P$ を求めよ．

（解） (1) 固有値は特性方程式

$$0 = \det(A - \lambda\,E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

の解であるから，固有値は

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である．また，固有ベクトル $\mathbf{v}_k = (x_k, y_k)^T$ は連立方程式

$$A\,\mathbf{v}_k = \lambda_k\,\mathbf{v}_k, \qquad \text{つまり，}\quad y_k = \lambda_k\,x_k, \quad x_k + y_k = \lambda_k\,y_k$$

の非自明な解であるから，$\mathbf{v}_1 = (1, \lambda_1)^T$，$\mathbf{v}_2 = (1, \lambda_2)^T$ と置ける．(2)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

より $\det P = \lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{5} \neq 0$ であるから，P^{-1} が存在する．また，

$$\begin{aligned} P^{-1}\,A\,P =& P^{-1}\,A\,(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = P^{-1}\,(A\,\mathbf{v}_1, A\,\mathbf{v}_2) = P^{-1}\,(\lambda_1\,\mathbf{v}_1, \lambda_2\,\mathbf{v}_2) \\ =& P^{-1}\,(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\,P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．■