解析学 I　解答例

2016.01.25

■　定義に従って，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ が成り立つことを示せ．

（解）　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n = \sqrt[n]{2} - 1$ とおくと，$a_n \geq 0$ と二項定理より

$$2 = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \, (a_n)^k \geq 1 + {}_nC_1 \, a_n = 1 + n \, a_n, \qquad \text{つまり，} \quad 0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$$

となる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，アルキメデスの原理より $n_0 \, \varepsilon > 1$ をみたす $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れ，すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$\left| \sqrt[n]{2} - 1 \right| = |\, a_n \,| = a_n \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ となる．■