解析学 I　解答例

2016.02.01

■　数列 $\{ a_n \}$，$\{ b_n \}$ を

$$a_1 = 2, \qquad b_1 = 1; \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定義するとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$ が成り立つことを示せ.

（解） 示すべき不等式を (E) とおく．(1) $a_2 = 3/2$，$b_2 = \sqrt{2}$ より $n = 1$ のとき (E) が成り立つ．(2) $n = k$ のとき (E) が成り立つと仮定する．明らかに $b_{k+1} \geq 0$ である．相加平均・相乗平均より

$$b_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}\, b_{k+1}} \leq \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2} = a_{k+2}$$

が成り立つ．また，漸化式と仮定より

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_{k+2} =& a_{k+1} - \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2} = \frac{a_{k+1} - b_{k+1}}{2} \geq 0, \\ b_{k+2} - b_{k+1} =& \sqrt{a_{k+1}\, b_{k+1}} - b_{k+1} = \frac{b_{k+1}\,(a_{k+1} - b_{k+1})}{\sqrt{a_{k+1}\, b_{k+1}} + b_{k+1}} \geq 0 \end{aligned}$$

が得られる．したがって，$n = k + 1$ のときにも (E) が成り立つ．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して (E) が成り立つ．■