解析学 II　解答例

2015.04.13

■　数列 $\{p_n\}$ を与えて，数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 > 0, \qquad x_{n+1} = p_n\,x_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定義する．

(1) ある定数 $p \in [0, 1)$ が取れて，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $p_n = p$ がみたされるとき，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であることを示せ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq p_n < 1$ がみたされるとき，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ が成り立つ場合には証明を，そうでない場合には反例を示せ．

(3) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $p_n > 1$ がみたされるとき，$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ が成り立つ場合には証明を，そうでない場合には反例を示せ．

(解) (1) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n = p^{n-1}\,x_1$ と表せ，$0 \leq p < 1$ であるから，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ である．

(2) 成り立たない．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_n = \frac{n+1}{n}, \qquad p_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^2 + 2\,n}{n^2 + 2\,n + 1}$$

とおくと，$\{p_n\}$ と $\{x_n\}$ は条件をみたすが，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 > 0$$

となる．

(3) 成り立たない．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_n = \frac{2\,n - 1}{n}, \qquad p_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2\,n^2 + n}{2\,n^2 + n - 1}$$

とおくと，$\{p_n\}$ と $\{x_n\}$ は条件をみたすが，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 < +\infty$$

となる．■