解析学 II　解答例

2015.04.20

■　α，β を実数とし，行列 D，R を

$$D = \begin{pmatrix} \alpha + i\,\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\,\beta \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

により定義するとき，行列 $R\,D\,R^{-1}$ を簡単にせよ．また，λ に対して行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

により定義するとき，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して行列 B^n を求めよ．

(解)　$i^2 = -1$ であることに注意して計算をすると，

$$\begin{aligned} R\,D\,R^{-1} =& R \begin{pmatrix} \alpha + i\,\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\,\beta \end{pmatrix} \left\{ \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ =& \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta - i\,\alpha & -\alpha - i\,\beta \\ -\beta - i\,\alpha & \alpha - i\,\beta \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -2\,i\,\alpha & -2\,i\,\beta \\ 2\,i\,\beta & -2\,i\,\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．また，行列 N を $N = B - \lambda\,E$ により定義すると，$N^2 = O$，$N\,E = E\,N = N$ が成り立つ．$N^0 = E$ とし，二項定理を適用すると，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} B^n = (\lambda\,E + N)^n =& \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\,(\lambda\,E)^{n-k}\,N^k = {}_nC_0\,(\lambda\,E)^{n-0}\,N^0 + {}_nC_1\,(\lambda\,E)^{n-1}\,N^1 \\ =& \lambda^n\,E + n\,\lambda^{n-1}\,N = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる．■