解析学 II　解答例

2015.04.27

■　λ を 2×2 実行列 A の固有値, $\mathbf{v}_1$ を λ に対応する A の固有ベクトルとするとき, $\mathbf{v}_2$ が $(A-\lambda E)\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ をみたすならば，$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ は一次独立であることを示せ.

(解) $\mathbf{v}_1$ は $(A-\lambda E)\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ をみたす非自明なベクトルであることに注意したい．$\alpha_1\,\mathbf{v}_1 + \alpha_2\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ とする．両辺に $A-\lambda E$ をかけると

$$\mathbf{0} = (A-\lambda E)\,\mathbf{0} = (A-\lambda E)\,(\alpha_1\,\mathbf{v}_1 + \alpha_2\,\mathbf{v}_2) = \alpha_1\,(A-\lambda E)\,\mathbf{v}_1 + \alpha_2\,(A-\lambda E)\,\mathbf{v}_2 = \alpha_2\,\mathbf{v}_1$$

となり，$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ であるから $\alpha_2 = 0$ である．このとき，元の線形結合が $\alpha_1\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ となるので，$\alpha_1 = 0$ が得られる．したがって，$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ は一次独立である．■