解析学 II　解答例

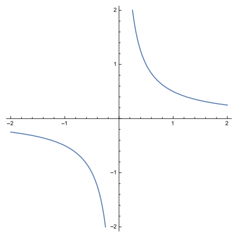
2015.05.07

■　二次形式 (1) $x^2 - y^2 = 1$ および (2) $x^2 + x\,y + y^2 = 1$ が表す図形をそれぞれ xy 平面に図示せよ．

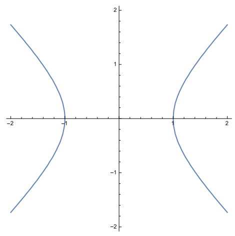
(解)　変数変換（原点を中心とする角度 $\pi/4$ の回転変換）

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{v-u}{\sqrt{2}}$$

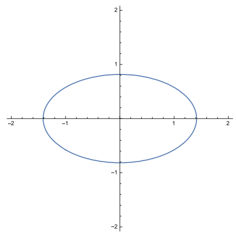
を用いる．このとき，$\sqrt{2}\,v = x + y$，$2\,x\,y = v^2 - u^2$，$x^2 - y^2 = 2\,u\,v$ であることに注意したい．



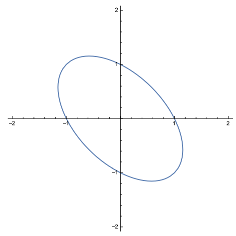
(1) uv 平面



(1) xy 平面



(2) uv 平面



(2) xy 平面

二次形式 (1) および (2) が表す図形はそれぞれ

$$1 = x^2 - y^2 = 2\,u\,v, \qquad 1 = x^2 + x\,y + y^2 = (x+y)^2 - x\,y = 2\,v^2 - \frac{v^2 - u^2}{2} = \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2/3}$$

と表され，上記の uv 平面上の図形を原点の周りに角度 $-\pi/4$ 回転したものである．■