# 解析学 II　解答例

2015.05.11

■　行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値および $A$ の行列ノルム $\|\,A\,\|_2$ を求めよ．

**(解)**　特性方程式

$$0 = \det(\lambda\,E - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)\,(\lambda - 3)$$

より，$A$ の固有値は $\lambda_1 = 1$ および $\lambda_2 = 3$ である．また，固有値 $\lambda_k$ （$k = 1$，$2$）に対応する $A$ の固有ベクトル $\mathbf{v}_k$ は $A\,\mathbf{v}_k = \lambda_k\,\mathbf{v}_k$ をみたす非自明なベクトルであるから，計算により $\mathbf{v}_1 = (1, -1)^T$，$\mathbf{v}_2 = (1, 1)^T$ が得られる．

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$P^{-1} = P^T$，

$$D = P^T\,A\,P = P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である．$\|\,\mathbf{x}\,\|_2^2 = \mathbf{x}^T\,\mathbf{x}$ であることに注意し，変数変換 $\mathbf{x} = P\,\mathbf{y}$，$\mathbf{y} = (y_k)$ を用いると，$A = A^T$ より

$$\begin{aligned} \|\,\mathbf{x}\,\|_2^2 =& \|\,P\,\mathbf{y}\,\|_2^2 = (P\,\mathbf{y})^T\,(P\,\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\,P^T\,P\,\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\,\mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2, \\ \|\,A\,\mathbf{x}\,\|_2^2 =& \|\,A\,P\,\mathbf{y}\,\|_2^2 = (A\,P\,\mathbf{y})^T\,(A\,P\,\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\,P^T\,A^T\,A\,P\,\mathbf{y} \\ =& \mathbf{y}^T\,(P^T\,A\,P)\,(P^T\,A\,P)\,\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\,D^2\,\mathbf{y} = y_1^2 + 9\,y_2^2 \end{aligned}$$

となるので，

$$\|\,A\,\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\,A\,\mathbf{x}\,\|_2}{\|\,\mathbf{x}\,\|_2} = \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\,A\,P\,\mathbf{y}\,\|_2}{\|\,P\,\mathbf{y}\,\|_2} = \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \sqrt{9 - \frac{8\,y_2^2}{y_1^2 + y_2^2}} = 3$$

である．■