解析学 II　解答例

2015.05.18

■　$A=(a_{ij})$ を任意の $n\times n$ 実行列，λ を A の任意の固有値とする．集合 B_k （$k=1$，2，$\cdots$，n）を

$$B_k=\left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; |\,z-a_{kk}\,|\le\sum_{j\neq k}|\,a_{kj}\,| \right\}$$

により定めるとき，$\lambda\in B=\bigcup_{k=1}^{n}B_k$ が成り立つことを示せ．

(解) λ に対応する A の固有ベクトルを $\mathbf{v}=(v_k)$ とすると，ある ℓ に対して $|\,v_\ell\,|=\max(|\,v_1\,|,|\,v_2\,|,\cdots,|\,v_n\,|)$ が成り立ち，$\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ より $|\,v_\ell\,|>0$ である．$A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$ の第 ℓ 要素について

$$\begin{aligned}|\,\lambda-a_{\ell\ell}\,|=&\frac{|\,(\lambda-a_{\ell\ell})\,v_\ell\,|}{|\,v_\ell\,|}=\frac{1}{|\,v_\ell\,|}\left|-\sum_{j\neq\ell}a_{\ell j}\,v_j\right|\\ \le&\frac{1}{|\,v_\ell\,|}\sum_{j\neq\ell}|\,a_{\ell j}\,|\,|\,v_j\,|\le\frac{1}{|\,v_\ell\,|}\sum_{j\neq\ell}|\,a_{\ell j}\,|\,|\,v_\ell\,|\le\sum_{j\neq\ell}|\,a_{\ell j}\,|\end{aligned}$$

となるので，$\lambda\in B_\ell\subset B$ が得られる．■