解析学 II　解答例

2015.06.08

■　実数 k は $k \neq 0$ をみたすものとする．3 次元ベクトル $\mathbf{x}_0$，$\mathbf{y}_0$，$\mathbf{q}$ （$\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$）に対して，2 つの直線 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,k\,\mathbf{q}$ （$t \in \mathbb{R}$） と $\mathbf{x} = \mathbf{y}_0 + s\,\mathbf{q}$ （$s \in \mathbb{R}$）の最短距離 L を求めよ．

(解) 3 次元ベクトル $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ に対して外積 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ は

$$\|\,\mathbf{x} \times \mathbf{y}\,\|^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 = \|\,\mathbf{x}\,\|^2\,\|\,\mathbf{y}\,\|^2$$

をみたすことに注意すると，

$$\begin{aligned}
f(s,t) =& \|\,(\mathbf{x}_0 + t\,k\,\mathbf{q}) - (\mathbf{y}_0 + s\,\mathbf{q})\,\|^2 = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 + (t\,k - s)\,\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 + (t\,k - s)\,\mathbf{q}) \\
=& \|\,\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\,\|^2 + 2\,(t\,k - s)\,(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{q} + (t\,k - s)^2\,\|\,\mathbf{q}\,\|^2 \\
=& \|\,\mathbf{q}\,\|^2 \left\{ (t\,k - s) + \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{q}}{\|\,\mathbf{q}\,\|^2} \right\}^2 + \frac{\|\,\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\,\|^2\,\|\,\mathbf{q}\,\|^2 - \{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{q}\}^2}{\|\,\mathbf{q}\,\|^2} \\
=& \|\,\mathbf{q}\,\|^2 \left\{ (t\,k - s) + \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{q}}{\|\,\mathbf{q}\,\|^2} \right\}^2 + \frac{\|\,(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \times \mathbf{q}\,\|^2}{\|\,\mathbf{q}\,\|^2}
\end{aligned}$$

より，

$$L = \frac{\|\,(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \times \mathbf{q}\,\|}{\|\,\mathbf{q}\,\|}$$

である．■