解析学 II　解答例

2015.06.15

■　次の問いに答えよ．

(1) 正数 a，b に対して不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$ が表す領域の面積を求めよ．

(1) 不等式 $x^2+x\,y+y^2\leq 1$ が表す領域の面積を求めよ．

(解) (1) 与えられた領域を D とする．変数変換 $x=a\,u$，$y=b\,v$ により，与えられた不等式は $u^2+v^2\leq 1$ に変換され，この不等式が表す領域を $\tilde{D}$ と表す．領域 D および $\tilde{D}$ の面積をそれぞれ $|\,D\,|$，$|\,\tilde{D}\,|$ と表すと，$dx\,dy=a\,b\,du\,dv$，$|\,\tilde{D}\,|=\pi$ より

$$|\,D\,|=\iint_D 1\,dx\,dy=\iint_{\tilde{D}} 1\cdot(a\,b)\,du\,dv=a\,b\iint_{\tilde{D}} 1\,du\,dv=a\,b\,|\,\tilde{D}\,|=a\,b\,\pi$$

となる．(2) 変数変換（原点を中心とする角度 $\pi/4$ の回転変換）

$$u=\frac{x-y}{\sqrt{2}},\quad v=\frac{x+y}{\sqrt{2}}\qquad\Longleftrightarrow\qquad x=\frac{u+v}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{v-u}{\sqrt{2}}$$

を用いと，与えられた不等式は

$$1\geq x^2+x\,y+y^2=(x+y)^2-x\,y=2\,v^2-\frac{v^2-u^2}{2}=\frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{2/3}$$

と表される．回転変換によって変換前後の領域の面積は変わらないので，(1) において $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2/3}$ とおくことにより，求める面積は $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2/3}\cdot\pi=2\sqrt{3}\pi/3$ である．■